数理科学Ｉ試験問題

担当：石岡，日時：2001 年 7 月 23 日（月）3 限，試験時間 90 分，持ち込み不可

答案用紙：両面２枚，計算用紙：１枚

（計算用紙は回収しないが答案用紙は２枚とも提出すること）

※解答に関係ない余計なことを書くと減点対象とすることもあるので注意すること．

1. u, v, w を x, y, z の関数として，

$$\begin{aligned} u &= \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} \\ v &= \frac{2x+z-x^2z}{1-x^2-2xz} \\ w &= \frac{2y+z-y^2z}{1-y^2-2yz} \end{aligned}$$

   とするとき，u, v, w の間には関数関係があることを示し，その具体形を求めよ．

2. n を 3 以上の整数とする．$x_k(k=1,2,...,n)$ を実数とするとき，条件：

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n \text{ かつ } \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n^3$$

   のもとで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx_k$ の最大・最小値と，それらを与える $x_k(k=1,2,...,n)$ を求めよ．

3. 以下の線積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{-\cos x \sinh y\, dx + \sin x \cosh y\, dy}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y}$$

   ここに，曲線 C は，

$$C: \quad x = t,\ y = 1-t \quad (0 \le t \le 1)$$

   とし，C の向きはパラメター t が減少する向きとする．なお，$\cosh y, \sinh y$ は，

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

   で定義される双曲線関数である．

4. 閉曲面 S を

$$S = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}, \quad (a,b,c>0)$$

   で記述される楕円面とし，$\boldsymbol{n}$ をこの閉曲面の単位法線ベクトル（この閉曲面の外側の方を向いている）とする．$\boldsymbol{r} = (x,y,z),\ r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^5}$ に対して，面積分

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot n dS$$

   の値を求めよ．