

記号論理学試験問題

学生番号 _____ 名前 _____

1. 次のうち、トートロジーはどれか判定せよ。

- (a) $\neg(\varphi \rightarrow \neg\varphi)$
- (b) $(\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- (c) $\varphi \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)))$
- (d) $(\varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)) \rightarrow \neg\varphi$
- (e) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

2. 次を証明せよ。

- (a) $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$
- (b) $\vdash \neg(P \wedge \neg Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
- (c) $P \vdash \neg(\neg P \wedge Q)$
- (d) $\neg(P \wedge \neg Q), P \vdash Q$
- (e) $\exists x \neg Fx \vdash \neg \forall x Fx$

3. 次の日本語の文を（述語）論理記号で書き表しなさい。ただし、「...はカエルである」、「...は緑色である」、「...は...より大きい」をそれぞれ F, G, R とせよ。

- (a) いかなるカエルも緑色でない。
- (b) 最大のカエルが存在する。
- (c) すべてのものはカエルであるか、カエルでないかのどちらかである。
- (d) 最小のカエルは存在しない。

4. 付値関数を用いて、以下を示しなさい。

- (a) $\Gamma \models \varphi$ かつ $\Delta \cup \{\varphi\} \models \psi$ ならば、 $\Gamma \cup \Delta \models \psi$,
- (b) $\Gamma \models (\varphi \vee \psi), \Delta \cup \{\varphi\} \models \alpha$ かつ $\Sigma \cup \{\psi\} \models \alpha$ ならば、 $\Gamma \cup \Delta \cup \Sigma \models \alpha$.

5. 命題から命題への写像 $*$ ($*$: $PROP \rightarrow PROP$) を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\varphi \text{ が命題記号ならば、} \varphi^* &= \neg\varphi, \\ (\varphi \wedge \psi)^* &= \varphi^* \vee \psi^*, \\ (\varphi \vee \psi)^* &= \varphi^* \wedge \psi^*, \\ (\neg\varphi)^* &= \neg\varphi^*\end{aligned}$$

(1) このとき、 $((p_0 \wedge \neg p_1) \vee p_2)^*$ の値（すなわち、* によって写された命題）がどのような形の命題になるかを示せ。

(2) φ^* の真理値と $\neg\varphi$ の真理値とが等しくなることを示せ。（ヒント：帰納法を用いる。また、ド・モルガンの法則 $\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ や $\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ は自由に使ってよい。）